Örnek! $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ fonksiyonunu alalım.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+2x=0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-(2x+2)(x+1)}{(x^2+2x)^2} = -\frac{(x^2+2x+2)}{(x^2+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x^2+2x+4)}{x^3(x+2)^3} = 0$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ayrıca $x=0$ ve $x=-2$ tanımsız.

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+2x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

$x=-1$ dönüm noktasıdır.

$x=-2$ ve $x=0$ tanımsız olduğundan dönüm noktası olamaz. 40

Örnek: $y=\sin x$ fonksiyonunun $[-\pi, 3\pi]$ aralığında ekstremumlarını ve dönüm noktalarını araştırınız.

Çözüm: $y'=\cos x=0 \Rightarrow x=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

$[-\pi, 3\pi]$ aralığındaki kritik noktalar $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$

$y''=-\sin x=0 \quad x=n\pi \quad , n\in\mathbb{Z}$

$[-\pi, 3\pi]$ için $-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$$\left.\begin{aligned} y''(-\tfrac{\pi}{2}) &= 1>0 \\ y''(\pi/2) &= -1<0 \\ y''(3\pi/2) &= 1>0 \\ y''(5\pi/2) &= -1<0 \end{aligned}\right\}$$

$x=-\dfrac{\pi}{2}$ ve $x=\dfrac{3\pi}{2}$ için minimum

$x=\dfrac{\pi}{2}$ ve $x=\dfrac{5\pi}{2}$ maksimum nokta.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π	
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
		$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	D.N	$\nearrow$	$+1$ maks	$\searrow$	D.N	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	D.N	$\nearrow$	1 maks.	$\searrow$		$\searrow$

EĞRİ ÇİZİMLERİ

$y=f(x)$ eğrisinin çizimi için aşağıdaki adımları takip etmek kolaylık sağlar.

1) Tanım kümesi ve varsa simetriler bulunur. Eksenleri kestiği noktalar bulunur.
2) Birinci ve ikinci türevler bulunur.
3) Kritik noktalar ve bu noktalarda ekstremumlar belirlenir.
4) Eğrinin artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur.
5) Konkavlık incelenerek büküm noktaları bulunur.
6) Asimptotlar varsa bulunur.
7) Tüm bunlar ortak bir tabloda gösterilir ve grafik çizimi yapılır.

NOT: Eğer f fonksiyonu trigonometrik tamdeğer fonksiyonlarını içeriyorsa periyot incelemesi de yapılabilir.

Hatırlatmalar:

$f(-x)=f(x) \Rightarrow f$ çift fonksiyon y eksenine göre simetrik

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow f$ tek fonksiyon orjine göre simetrik.

Düşey asimptot fonksiyonu tanımsız yapan ayrık tekil noktalarda aranır.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)=c \Rightarrow y=c$ yatay asimptottur.

Yatay asimptot yoksa eğri (veya eğik) asimptot olabilir.

$y=mx+n$ eğik asimptotunu $+\infty$ kolda ve $-\infty$ kolda nasıl bulunacağını hatırlatalım.

$$m=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{ve} \quad n=\lim_{x\to\mp\infty} f(x)-mx$$

şeklinde bulunur.

* $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ fonksiyonu için $a<0$ ise asimptot yoktur.

$a>0$ ise eğik asimptot

$$y=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$ şeklindedir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}+x-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

Çözüm:

$x^2-3x-4 \geqslant 0 \qquad (x-4)(x+1) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x-4 \geqslant 0\} = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

aralığında tanımlıdır.

$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(x)$ ne tek ne de çifttir.

Düşey asimptot tanım kümesinde olmayan ayrık tekil noktalarda arandığından düşey asimptot yoktur.

Tanım kümesi izin verdiği için yatay asimptot araştırabiliriz.

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-3x-4}+x-1 = \infty+\infty=\infty$, $+\infty$ kolda yatay asimptot yoktur

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x-4}+x-1 = \infty-\infty$$ "Eşlenik ile çarpıp böldüm"

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x-4}+x-1\right)\left(\sqrt{x^2-3x-4}-x+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x-4}-x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-3x-4)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-3x-4}-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-5}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x+1} = \frac{1}{2}$$

O halde $-\infty$ kolda

$y=\frac{1}{2}$ yatay asimptottur.

$+\infty$ kolda yatay asimptot olmadığından eğri (veya eğik) asimptot olabilir.

$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)+x-1 \Rightarrow y=2x-\frac{5}{2}$ yatay asimptot.

" $\sqrt{ax^2+bx+c}$ için asimptot $f(x)=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$, $a>0$ "

Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x=0$ tanımlı değil y eksenini kesmez.

$y=0 \Rightarrow x=-5$ $(-5,0)$

Ekstremum noktalarını bulalım.

$$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}}+1=\frac{2x-3+2\sqrt{x^2-3x-4}}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$$

$f'(x)=0$ için $2x-3+2\sqrt{x^2-3x-4}=0$

$$2x-3=-2\sqrt{x^2-3x-4}$$

$$4x^2-12x+9=4x^2-12x-16$$

$9=-16$ olup kök yok.

Ohalde ekstremumlar için türevin tanımsız olduğu noktalara bakabiliriz.

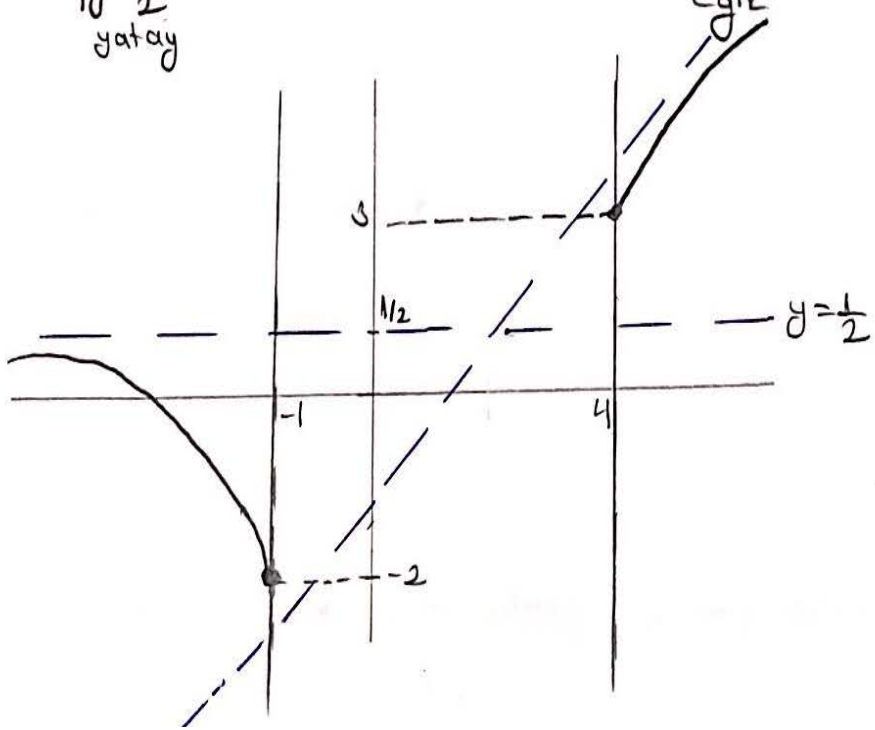
$x^2-3x-4\leq 0$ $(x-4)(x+1)\leq 0$ $[-1,4]$ dir.

Elde ettiğimiz bilgilerle tabloyu oluşturabiliriz.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$y=\frac{1}{2}$ yatay	$\searrow$	-2		3	$\nearrow$	$y=2x-\frac{5}{2}$ eğik

$f(-1) = -2$

$f(4) = 3$



Örnek! $f(x) = \ln(-x^2+5x-4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

"$y=\log_a b$ için $b>0$, $a>0$ ve $a\neq 1$ dir"

$$D_f = \{ x\in\mathbb{R} \mid -x^2+5x-4>0 \}$$
$$= \{ x\in\mathbb{R} \mid (x-1)(x-4)<0 \}$$
$$= (1,4)$$

x		1		4	
	$+$		$-$		$+$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(-x^2+5x-4) = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} \ln(-x^2+5x-4) = \ln 0^+ = -\infty$$

Tanım kümesinden dolayı düşey asimptot aramaz.

* Yine tanım kümesinde x leri ∞ 'a götürmek mümkün olmadığından yatay asimptot aranmaz.

* $x=0$ olamayacağından eğri y eksenini kesmez.

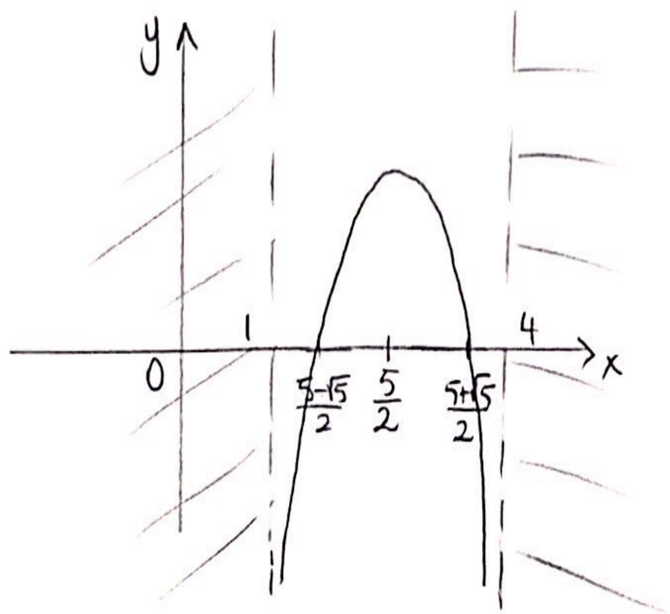
$y=0$ ise $\ln(-x^2+5x-4)=0$

$$\Rightarrow -x^2+5x-4=1$$

$$\Rightarrow x^2-5x+5=0 \Rightarrow x_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

* $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{-x^2+5x-4} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

x	1		$\frac{5}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$



Örnek: $f(x)=\dfrac{e^{-x+2}}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\forall u \in \mathbb{R}$ $e^{u}>0$ dır.

$D_f=\{x \mid x\in\mathbb{R}-\{0\}\}$

$f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)=-f(x)$ ne tek ne de çifttir.

$x=0$ ı inceleyelim.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x+2}}{x}&=\frac{e^2}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x+2}}{x}&=\frac{e^2}{0^-}=-\infty\end{aligned}\right\}$$

$x=0$ çift taraflı düşey asimptottur.